ENSA Ecole Nationale des Sciences Appliquées BERRECHID

جامعة الحسن الأول
UNIVERSITÉ HASSAN 1ER

Prof. KHALID BOUIHAT

Gauss-Seidel method

It is not knowledge, but the act of learning, not possession but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment.

réalisée par:

- **AHMED BEN AHMED**
- **ZOUHAIR SERRAR**
- **IMRANE HAJJI**

GAUSS—SEIDLE

INTRODUCTION

La méthode de Gauss-Seidel est une technique itérative utilisée pour résoudre des systèmes d'équations linéaires de la forme Ax=b, où A est une matrice carrée.

Elle repose sur l'idée de mettre à jour successivement chaque variable en utilisant les valeurs les plus récentes des autres variables, ce qui peut permettre une convergence plus rapide par rapport à d'autres méthodes itératives, comme la méthode de Jacobi.

GAUSS—SEIDLE

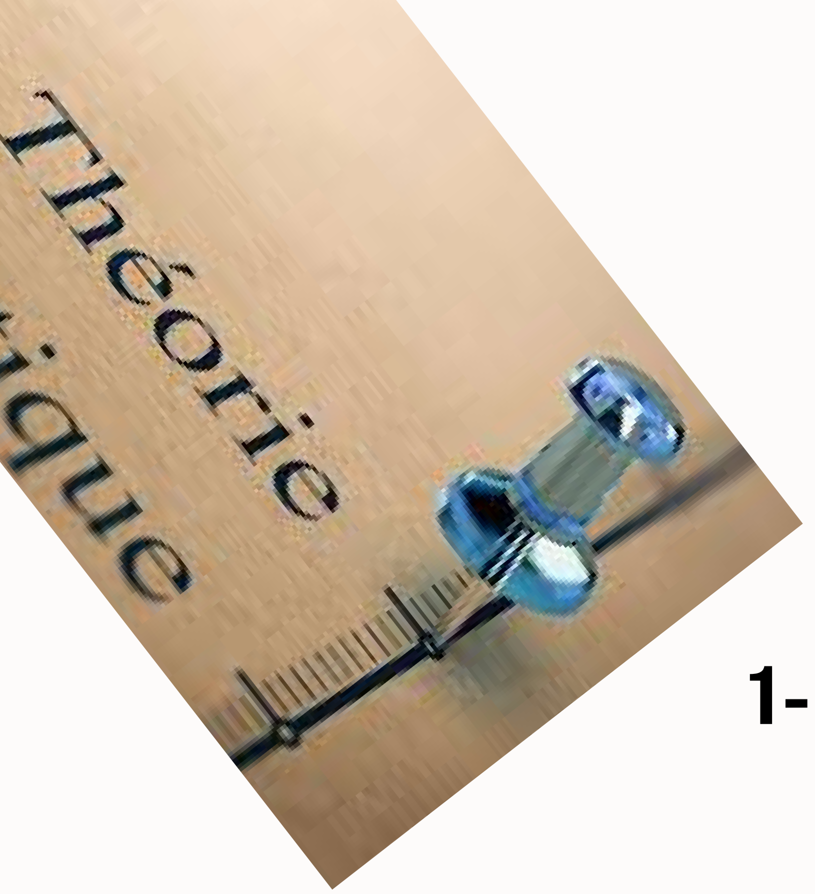
Importance et Applications dans la Résolution des Systèmes d'Équations Linéaires

Importance :

- Utile pour résoudre des systèmes d'équations linéaires où les méthodes directes (par exemple, l'élimination de Gauss) sont coûteuses ou impraticables.
- Particulièrement adaptée lorsque la matrice A est creuse (sparse) ou de grande dimension.

Applications :

- Analyse structurelle en ingénierie.
- Simulation de réseaux électriques (analyse de circuits).
- Méthodes numériques en dynamique des fluides et en résolution des équations aux dérivées partielles.



Théorique

1-Écrire le système Ax=b sous la forme itérative :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

où k est l'indice d'itération, aii≠0(les éléments diagonaux de A doivent être non nuls).

2-Initialiser un vecteur x^(0)(par exemple,x^{(0)} = 0).

3-Mettre à jour successivement les composantes Xi jusqu'à convergence, en respectant l'équation ci-dessus.

4-Arrêter les itérations lorsque

où **ϵ** epsilonϵ est une tolérance définie.

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon$$

Équations Clés

L'algorithme repose sur une décomposition de la matrice A en :

A=L+D+U

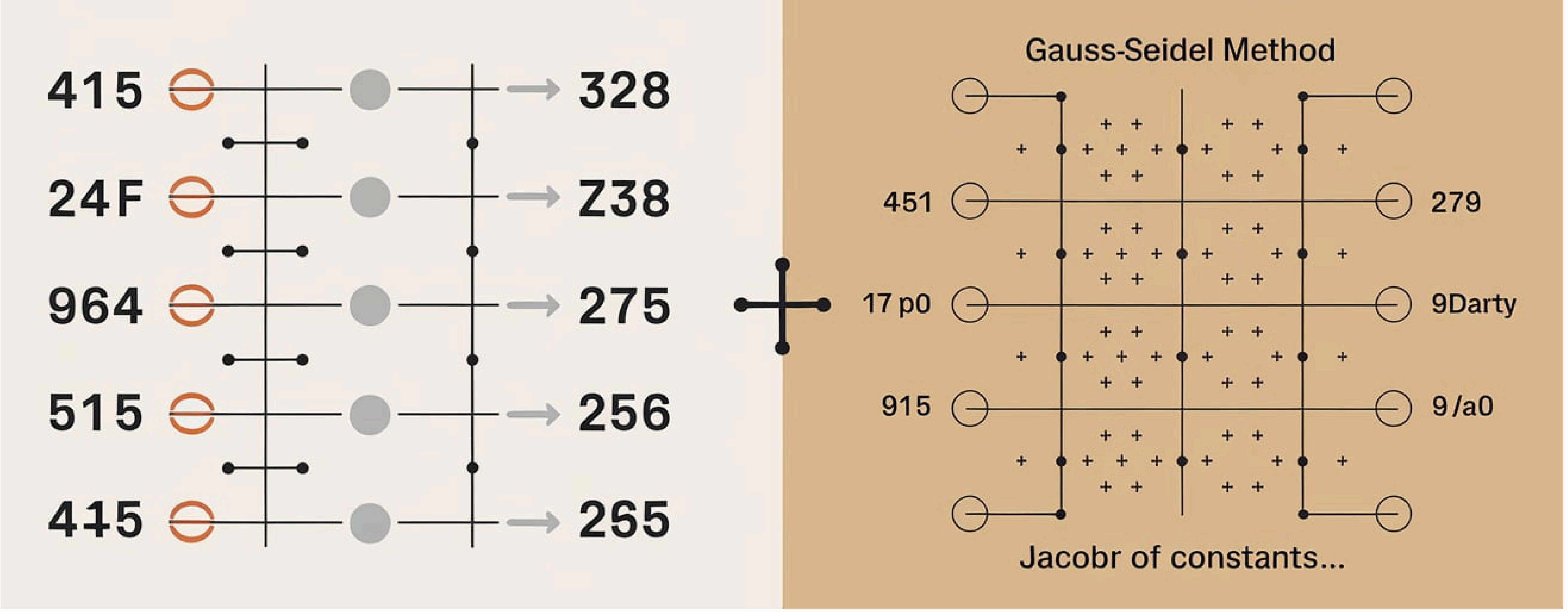
D : matrice diagonale.

L : matrice triangulaire inférieure stricte.

U : matrice triangulaire supérieure stricte

La formule itérative peut être exprimée en termes matriciels comme suit:

$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b$$



Comparaison avec la Méthode de Jacobi

> Méthode de Jacobi :

Chaque composante Xi^(k+1) est calculée uniquement à partir des valeurs de X^(k)(itération parallèle).

Formule :

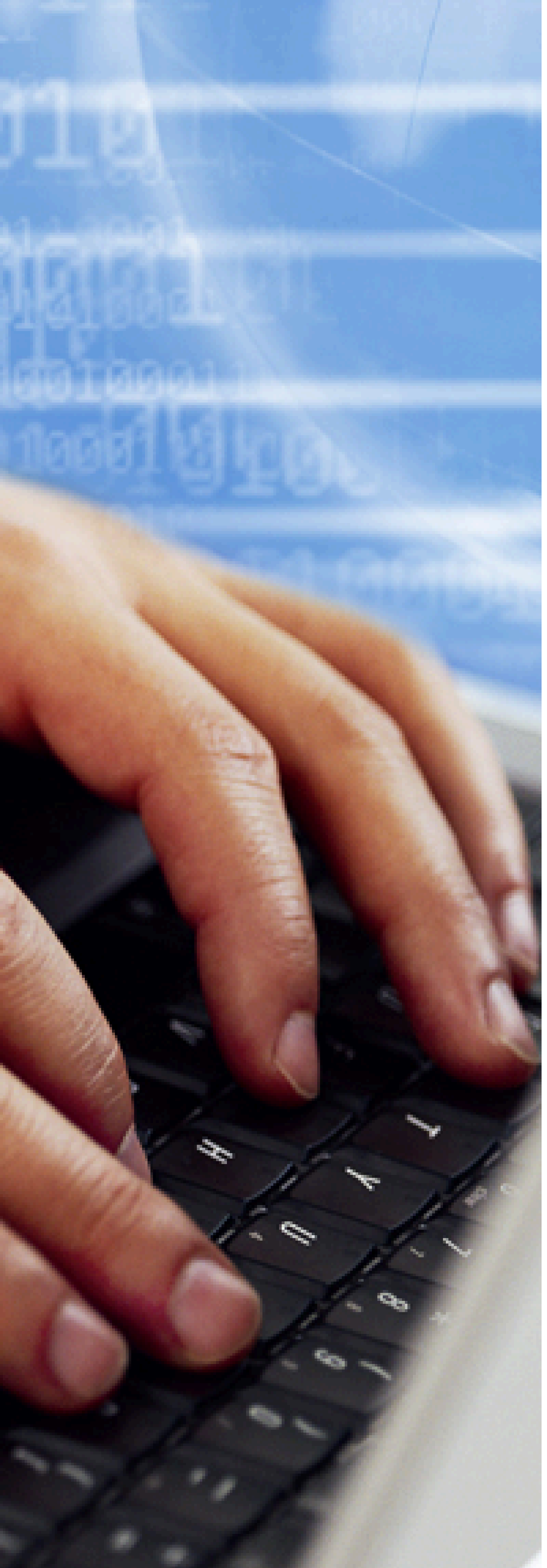
$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

> Avantages de Gauss-Seidel :

-Convergence généralement plus rapide car elle utilise immédiatement les nouvelles valeurs Xi^(k+1).
-Plus efficace pour les matrices bien conditionnées ou à diagonale dominante.

> Limitation :

La méthode peut ne pas converger si la matrice A n'est pas à diagonale dominante ou symétrique définie positive.



Démonstration avec un Outil de Programmation

Exemple en Matlab :

```matlab
% Initialisation
A = [4 -1 0; -1 4 -1; 0 -1 4];
b = [15; 10; 10];
x0 = [0; 0; 0]; % Approximation initiale
tol = 1e-6;     % Tolérance
max_iter = 100; % Nombre maximal d'itérations

% Algorithme de Gauss-Seidel
n = length(b);
x = x0;
for k = 1:max_iter
    x_old = x;
    for i = 1:n
        x(i) = (b(i) - A(i, 1:i-1)*x(1:i-1) - A(i, i+1:n)*x_old(i+1:n)) / A(i, i);
    end
    if norm(x - x_old, inf) < tol
        break;
    end
end
disp(x);
```

EXEMPLE

RESOLUTION DU SYSTEM AX=B>

VIDEO manime RESOLUTION DU SYSTEM AX=B>

Les critères de convergence

La méthode de Gauss-Seidel converge, quels que soient le vecteur b et le point initial x0, dans les situations suivantes :

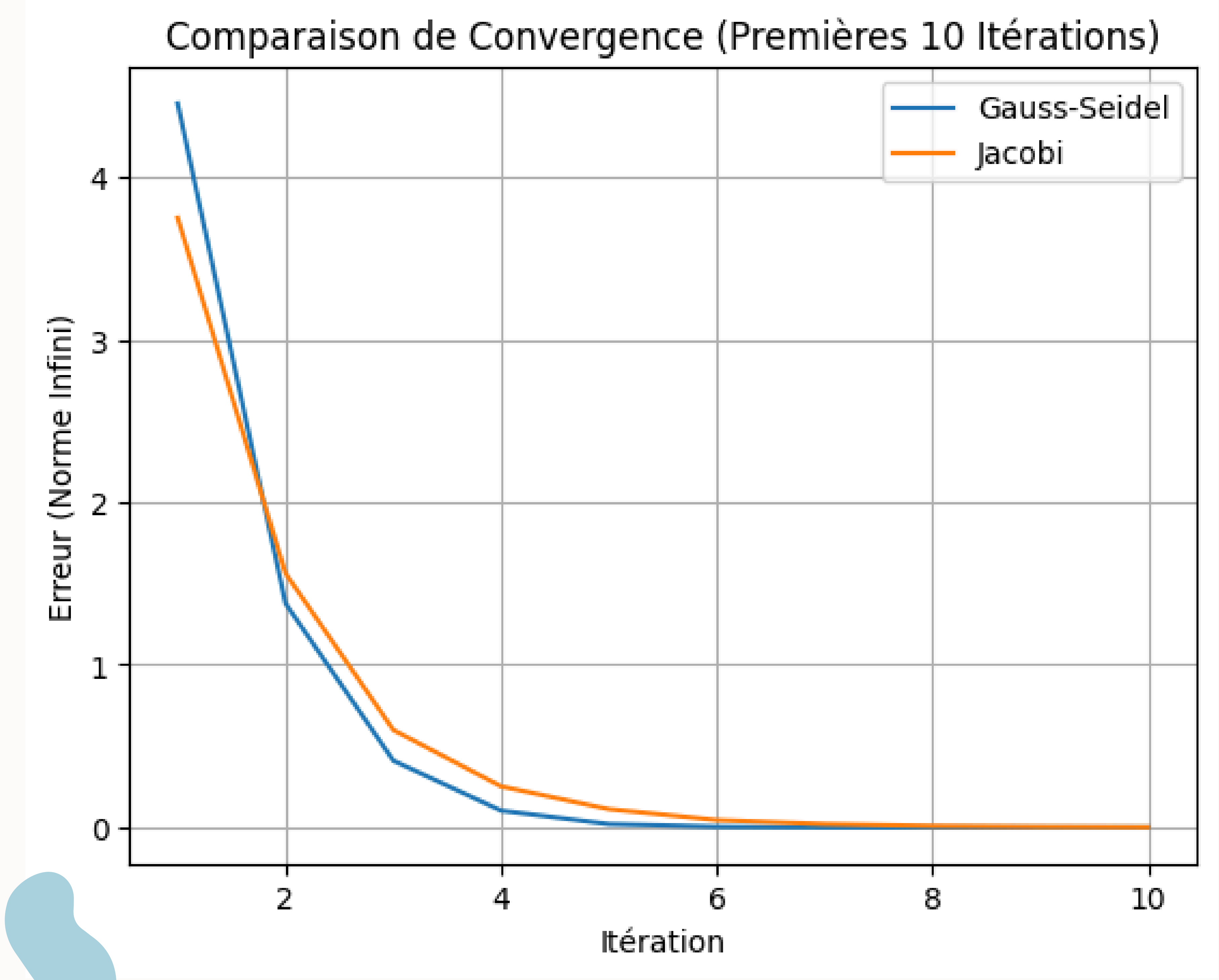
- si la matrice A est <u>symétrique définie positive</u>

$$\mathrm{Spec}(M) \subseteq \mathbb{R}^{*+}$$

- si A est <u>à diagonale strictement dominante</u>.

$$\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

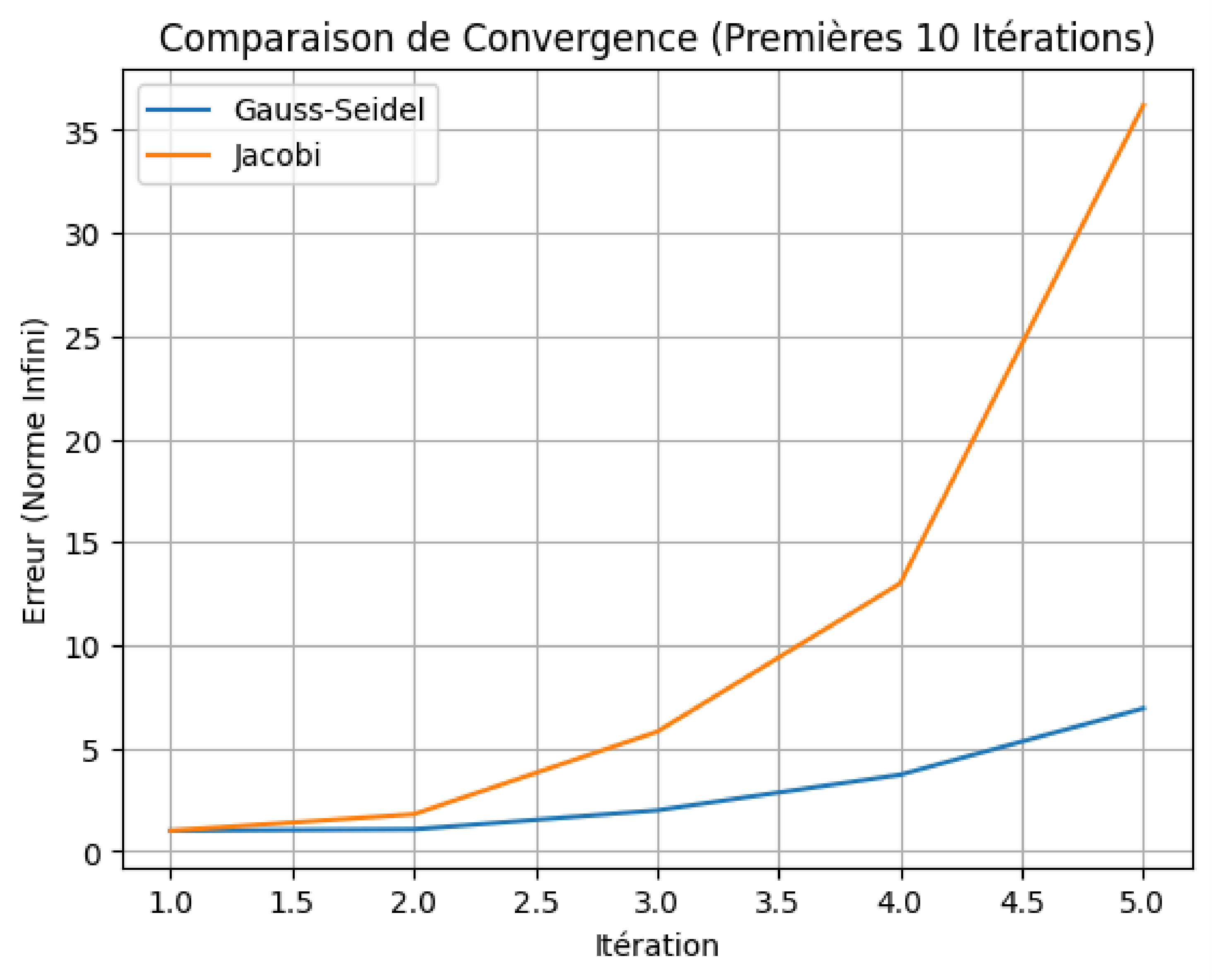
Les taux de convergence de Gauss-Seidel vs. Jacobi pour le même problème



Itération	Gauss-Seidel Erreur	Jacobi Erreur
1	4.45e+00	3.75e+00
2	1.38e+00	1.56e+00
3	4.10e-01	5.99e-01
4	1.03e-01	2.52e-01
5	2.00e-02	1.12e-01
6	3.63e-03	4.48e-02
7	6.52e-04	2.02e-02
8	1.17e-04	8.03e-03
9	2.10e-05	3.62e-03
10	3.76e-06	1.44e-03

Example d’une matrice qui ne converge pas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



APPLICATION

de la méthode de Gauss-Seidel en traitement d'images

En **traitement d'images**, la méthode de **Gauss-Seidel** est utilisée pour lisser ou réduire le bruit dans une image. Cela est possible grâce à la résolution d'une équation de Poisson discrétisée, qui aide à adoucir les pixels tout en préservant les bords.

Qu'est-ce que l'équation de Poisson ?

L'équation de Poisson est utilisée pour modéliser la diffusion ou la propagation des valeurs à travers un domaine. En traitement d'image, elle est utilisée pour **lisser l'image** et **réduire le bruit.**

- **Une équation aux dérivées partielles :** $\nabla^2 u = f$

∇^2 est le Laplacien, qui mesure la courbure locale

u est l'image lissée que nous cherchons.

f est l'image bruitée d'entrée.

But :

Trouver u (image lissée) à partir de f.

Rôle de Gauss-Seidel dans le traitement d’image

- La méthode de **Gauss-Seidel** est utilisée pour mettre à jour les pixels un par un, en exploitant les valeurs récemment calculées pour améliorer la précision :
  - **Étape clé** :
  - Lorsqu'on calcule la nouvelle valeur d'un pixel, on utilise immédiatement les valeurs déjà mises à jour dans la même itération (comme dans la méthode **Gauss-Seidel** classique pour **AX = B**).
  - Cela accélère la convergence par rapport à des méthodes qui utilisent uniquement les valeurs de l'itération précédente.
- **Gauss-Seidel** répète ce processus jusqu'à ce que les mises à jour deviennent suffisamment petites (critère de convergence).

L'Equations de Poisson dans le Traitement d'Image

L'équation discrétisée de Poisson pour une image est donnée par :

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - f_{i,j}\right)$$

- $u_{i,j}$: La valeur du pixel lissé.
- $f_{i,j}$: La valeur du pixel bruité.
- Les voisins : $u_{i+1,j}, u_{i-1,j}, u_{i,j+1}, u_{i,j-1}$ sont les pixels voisins dans les directions haut, bas, gauche et droite.

L'idée est de mettre à jour chaque pixel en fonction de la moyenne des pixels voisins et de la valeur du pixel bruité.

Pourquoi utiliser Gauss-Seidel pour le lissage d'image ?

Gauss-Seidel est un choix parfait pour l'application de l’équation de Poisson en raison des raisons suivantes :

- Il est efficace pour résoudre les grandes matrices associées aux images.
- La méthode itérative permet de traiter les pixels un à un tout en utilisant les résultats précédents, ce qui rend l'algorithme adapté au lissage d'images pixel par pixel.
- Elle aide à réduire le bruit tout en préservant les bords de l'image.

Les pixels de l'image sont mis à jour itérativement, ce qui entraîne un lissage progressif de l'image et une réduction du bruit sans effacer les contours importants.

Processus de Gauss-Seidel pour Lissage d’Image

Comment Gauss-Seidel agit sur l'image :

1. ***<u>Initialisation :</u>*** L'image lissée commence par être une copie de l'image bruitée.
2. ***<u>Mise à jour des pixels :</u>*** À chaque itération, chaque pixel $u_{i,j}$ est mis à jour en fonction de ses voisins dans l'image.
3. ***<u>Convergence :</u>*** Le processus est répété jusqu’à ce que les changements entre les itérations successives soient suffisamment petits. Cela signifie que l'image est devenue lissée et le bruit a été réduit.

Code MATLAB pour l’Application de Gauss-Seidel

Applications concrètes dans l’industrie :

- **Réduction du bruit** dans les images médicales (IRM, scanner) pour améliorer la qualité d'image et faciliter le diagnostic.
- **Filtrage d'image** dans la photographie numérique, pour éliminer les artefacts de compression tout en préservant les détails.
- **Lissage d'image** dans la vision par ordinateur pour améliorer la détection des objets.

Conclusion

- La méthode **Gauss-Seidel** est un outil puissant et efficace pour **lisser** les images et **réduire le bruit**, surtout dans les grands ensembles de données d'images où les méthodes directes sont coûteuses en temps et en mémoire.
- En combinant l'**équation de Poisson** avec Gauss-Seidel, nous pouvons améliorer **la qualité des** images tout en maintenant les informations essentielles (bords, textures).

Merci !